Printed Pages – 5

21103

B. Sc. (Second Year) Examination, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper : First

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : *सभी खण्ड निर्देशानुसार हल कीजिए।*

Note: *Attempt all sections as directed.*

खण्ड-अ

Section-A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न) 5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : *सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।*

Note: *Attempt all questions. Each question carries 1 mark.*

StudentSuvidha.com
downloaded from

1. सही उत्तर का चयन कीजिए—

Choose the correct answer :

(i) यदि G एक परिमित क्रम विनिमेय समूह है और $H|\circ(G)$, तब एक अवयव $a(\neq e)\in G$ का अस्तित्त्व इस प्रकार है कि—

(a) $a^n = a$ (b) $a^n \neq e$

(c) $a^n = e$ (d) $a^n = a^2$

If G is a finite abelian group and $H|\circ(G)$ then there exist an element $a(\neq e)\in G$ s.t. :

(a) $a^n = a$ (b) $a^n \neq e$

(c) $a^n = e$ (d) $a^n = a^2$

(ii) क्रम विनिमेय समूहों के लिए तत्समक प्रतिचित्रण है—

(a) एकैकी (b) आच्छादक

(c) समकारिता (d) उपर्युक्त सभी

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

For abelian group, identity mapping is :

(a) one-one (b) onto

(c) homomorphism (d) all above

(iii) किसी समूह पर अवयवों के संयुग्मिता का सम्बन्ध होता है—

(a) मात्र स्वतुल्य सम्बन्ध (b) मात्र सममित सम्बन्ध

(c) मात्र संक्रमक सम्बन्ध (d) समतुल्यता का सम्बन्ध

Over a group the relation of conjugacy of elements is :

(a) Only reflexive relation (b) Only symmetric relation

(c) Only transitive relation (d) Equivalence relation

(iv) यदि N समूह G का प्रसामान्य उपसमूह हो और $a \in N$ तब—

(a) $c(a) \subseteq N$ (b) $N \subseteq c(a)$

(c) $c(a) = \{e\}$ (d) इनमें से कोई नहीं

If N is normal subgroup of G and $a \in N$, then :

(a) $c(a) \subseteq N$ (b) $N \subseteq c(a)$

(c) $c(a) = \{e\}$ (d) None of these

(v) यदि $f : R \to R^1$ एक समकारी फलन है, तब समाकारिता की अष्टि होगी—

(a) R का उपवलय (b) R^1 का उपवलय

(c) R की गुणजावली (d) R^1 की गुणजावली

If $f : R \to R^1$ be a homomorphism function then the kernel of this homomorphism is :

(a) A subring of R (b) A subring of R^1

(c) An ideal of R (d) An ideal of R^1

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

खण्ड-ब

Section-B

(लघु उत्तरीय प्रश्न) $5 \times 2 = 10$

(Short Answer Type Questions)

नोट : *सभी* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।*

Note: *Attempt all* ***five*** *questions. Each question carries 2 marks.*

2. समूह में प्रतिलोम नियम लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove reciprocal law in a group G.

अथवा

Or

दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक उपसमूह होता है। सिद्ध कीजिए।

Prove that the intersection of two subgroups is a subgroup.

3. फर्मा के प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Fermat's theorem.

अथवा

Or

माना कि H तथा K समूह के दो परिमित उपसमूह हैं, तब सिद्ध कीजिए कि— $\circ(HK) = \dfrac{\circ(H)\circ(K)}{\circ(H \cap K)}$

If H and K are any two finite subgroups of a group G, then prove that : $\circ(HK) = \dfrac{\circ(H)\circ(K)}{\circ(H \cap K)}$

4. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ तब AB, BA तथा AB^{-1} के मान ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ then find AB, BA and AB^{-1}.

अथवा

Or

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

यदि $f: G \to G'$ समूहों पर समकारिता है तथा $a \in G$ तो सिद्ध कीजिए– $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

If $f: G \to G'$ is a homomorphism on groups and $a \in G$ then prove that : $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

5. यदि G एक परिमित समूह हो, तो सिद्ध कीजिये कि– $C_a = \frac{\circ(G)}{\circ(N(a))}$

If G is a finite group, then show that : $C_a = \frac{\circ(G)}{\circ(N(a))}$

अथवा

Or

किसी समूह G के अवयव के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए $N(a)$ समूह G का उपसमूह है।

Define normalizer of an element of G and prove that $N(a)$ is a subgroup of G.

6. किसी वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी एक गुणजावली होता है।

The intersection of two ideals of a ring is an ideal of that ring.

अथवा

Or

वलय R पर सभी बहुपदों के समुच्चय $R[X]$ योग और गुणन के सापेक्ष रिंग (वलय) बनाते हैं।

The set $R[X]$ of all polynomial over a ring R forms a ring with respect to addition and multiplication of polynomials. https://www.mpbouonline.com

downloaded from StudentSuvidha.com

खण्ड-स

Section-C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न) $5 \times 5 = 25$

(Long Answer Type Questions)

नोट : *सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।*

Note: *Attempt all **five** questions. Each question carries 5 marks.*

7. यदि H, G का एक उपसमुच्चय है एवं $a, b \in G$ तो $Ha = Hb$ या $Ha \cap Hb = \phi$

If H is a subgroup of a group G and $a, b \in G$ then $Ha = Hb$ or $Ha \cap Hb = \phi$.

अथवा

Or

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com

सिद्ध कीजिए प्रत्येक अभाज्य कोटि का समूह चक्रीय होता है।

Prove that every group of prime order is cycle.

8. सिद्ध कीजिए कि 'किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का भाजक होती है'।

Prove that 'Order of every subgroup of a finite group divides order of that group'.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए समूह का केन्द्र सदैव प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove the centre of a group G is always normal subgroup.

9. कैली के प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley's theorem.

अथवा

Or

यदि $f: G \to G'$ कोई समूह समकारिता है तो f एकैकी होगा यदि और केवल यदि $K = \{e\}$ जहाँ K, f की अष्टि है।

If $f: G \to G'$ is any group homomorphism then f will be one one iff $K = \{e\}$ where K is kernel of f.

10. परिमित आबेली समूह के लिए कॉशी प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's theorem for a finite group.

अथवा

Or

समूह स्वकारिता, अंतः स्वकारिता और स्वकारिताओं के समूह को उदाहरण सहित समझाइए।

Explain Group Automorphism, Inner Automorphism and Group of Automorphism with example.

11. वलयों के समाकारिता पर मूल प्रमेय — एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब किसी विभाग वलय से तुल्यकारी होता है। सिद्ध कीजिए।

Fundamental theorem on homomorphism of ring : Every homomorphic image of a ring is isomorphic to some quotient ring. Prove it.

अथवा

Or

प्रत्येक क्षेत्र का पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Every field is an integral domain.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha.com